Über die Bewegung des Pendels

mit

Cardanischer Aufhängung.

Inaugural-Dissertation, verfasst und der Hohen Philosophischen Facultät

der

K. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt von

Paul Bräuer,

Realgymnasiallehrer aus Hannover.

Hannover

Druck von Friedrich Culemann (M. Leonhardt)

1888.

Über die Bewegung des Pendels

mit

Cardanischer Aufhängung.

Inaugural-Dissertation, verfasst und der Hohen Philosophischen Facultät

der

K. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt von

Paul Bräuer,

Realgymnasiallehrer aus Hannover.

Hannover

Druck von Friedrich Culemann (M. Leonhardt)

1888.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546422_0042

Die Anregung zur Behandlung der vorliegenden Aufgabe wurde mir von Herrn Professor E. Schering gegeben, dem ich für seinen mir gütigst erteilten Rat meinen ergebensten Dank abstatte. Zugleich erlaube ich mir an dieser Stelle, den Herren Professoren Gordan und Nöther, deren freundlichem Rat ich eine wesentliche Förderung meiner Studien verdanke, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ein aus Metall verfertigter Kreisring von rechteckigem Querschnitt sei um zwei, einander diametral gegenüberliegende dreikantige, stählerne Axen drehbar, deren eine Kante auf polierten, ebenen Lagern ruht. Diese Axen seien mit dem Ringe so verbunden, dass die Verlängerungen der Drehungskanten durch den Schwerpunkt des Ringes gehen. An zwei um 90° vom Schnittpunkt dieser Axen mit dem Ringe entfernten Punkten seien auf dem Ringe selbst zwei schwach cylindrisch-concave Lager angebracht, auf denen eine dreikantige Axe mit der Schneide ruht, welche letztere ebenfalls durch den Schwerpunkt des Ringes geht.

Mit der Mitte dieser Axe sei eine dünne Metallstange senkrecht fest verbunden, welche die eigentliche Masse des

Pendels trägt. Die Lager, auf denen die Drehungsaxe des Ringes ruht, seien genau horizontal auf einem festen Holzgestell befestigt, so dass die Ruhelage der Pendelstange mit der Richtung der Schwere zusammenfällt.

Bei der Untersuchung der Bewegung dieses Pendels werde die Drehung der Erde sowie der Einfluss von Reibungs- und Luftwiderstand nicht berücksichtigt. Ein beliebiger Punkt des Pendels habe in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem die Coordinaten x, y, z.

Der Anfang des Systems liege im Schwerpunkte des Ringes, die z-Axe sei horizontal gerichtet und falle mit der Drehungsaxe des Ringes zusammen. Die x-Axe sei vertikal aufwärts und die positive y-Axe so gerichtet, dass eine menschliche Figur, welche in der Richtung der positiven z-Axe mit den Füssen im Coordinatenanfange steht und nach der positiven x-Axe hinsieht, die positive y-Axe zur Linken hat. Durch eine Drehung um die z-Axe um einen Winkel q_1, welcher positiv in derjenigen Richtung gerechnet wird, in welcher die positive x-Axe um 90° gedreht werden muss, um mit der positiven y-Axe zusammenzufallen gelangt man zu einem zweiten Coordinatensystem, welches mit dem Ringe fest verbunden ist und in Bezug auf welches derselbe Punkt des Pendels die Coordinaten x_1, y_1, z_1 habe.

Dann ist:

$$1) \quad \begin{aligned} x &= x_1 \cos q_1 - y_1 \sin q_1 \\ y &= y_1 \cos q_1 + x_1 \sin q_1 \\ z &= z_1. \end{aligned}$$

Durch eine Drehung dieses Systems um die y_1-Axe, welche mit der Drehungsaxe der Pendelstange zusammen-

fällt, um einen Winkel q_2, der von der z_1-Axe zur x_1-Axe positiv in dem obigen Sinne gerechnet wird, gelangt man zu einem dritten System. Dasselbe ist mit der Pendelstange fest verbunden.

x_2, y_2, z_2 seien die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf dieses System. Dann ist:

$$2) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos q_2 + z_2 \sin q_2 \\ y_1 &= y_2 \\ z_1 &= z_2 \cos q_2 - x_2 \sin q_2. \end{aligned}$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$3) \quad \begin{aligned} x &= x_2 \cos q_1 \cos q_2 + z_2 \cos q_1 \sin q_2 - y_2 \sin q_1 \\ y &= y_2 \cos q_1 + x_2 \sin q_1 \cos q_2 + z_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ z &= z_2 \cos q_2 - x_2 \sin q_2. \end{aligned}$$

Es werden nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

g = Schwerbeschleunigung,

V = Kräftefunktion,

T = Lebendige Kraft,

C_1 = Trägheitsmoment des Ringes in Bezug auf seine Drehungsaxe,

A_2, B_2, C_2 = Trägheitsmomente des Pendels in Bezug auf die Axen x_2, y_2, z_2,

$\left.\begin{matrix} dm_1 \\ dm_2 \end{matrix}\right\}$ = Massenelemente $\begin{matrix} \text{des Ringes,} \\ \text{des Pendels,} \end{matrix}$

a = Abstand des Schwerpunktes des Pendels vom Coordinatenanfang.

Da eine Kräftefunktion existiert, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung in der zweiten Form von Lagrange:

$$4) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) = \frac{\partial (T + V)}{\partial q_1};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) = \frac{\partial (T+V)}{\partial q_2}; \text{ worin}$$

$$q_1' = \frac{dq_1}{dt},\ q_2' = \frac{dq_2}{dt} \text{ ist.}$$

Die ganze lebendige Kraft des Systems besteht aus derjenigen des Ringes, die mit T_1 und derjenigen des Pendels, die mit T_2 bezeichnet werden möge. Es ist:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm_1$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} \int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm_2.$$

Bei der Berechnung von T_1 sind die Formeln 1) anzuwenden. Es ist:

$$x' = -(x_1 \sin q_1 + y_1 \cos q_1)\, q_1'$$
$$y' = (x_1 \cos q_1 - y_1 \sin q_1)\, q_1'$$
$$z' = 0.$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x_1^2 \sin^2 q_1 q_1'^2 + 2 x_1 y_1 \sin q_1 \cos q' q_1'^2$$
$$+ y_1^2 \cos^2 q_1 q_1'^2 + x_1^2 \cos^2 q_1 q_1'^2 - 2 x_1 y_1 \sin q_1 \cos q_1 q_1'^2$$
$$+ y_1^2 \sin^2 q_1 q_1'^2 = q_1'^2 (x_1^2 + y_1^2)$$
$$T_1 = \tfrac{1}{2} C_1 q_1'^2.$$

Um T_2 zu berechnen wendet man die Formeln 3) an. Es ist:

$$x' = -z_2 (\sin q_1 \sin q_2 q_1' - \cos q_2 \cos q_1 q_2')$$
$$- x_2 (\cos q_2 \sin q_1 q_1' + \cos q_1 \sin q_2 q_2') - y_1 \cos q_1 q_1'$$
$$y' = z_2 (\sin q_2 \cos q_1 q_1' + \cos q_2 \sin q_1 q_2')$$
$$- x_2 (\sin q_1 \sin q_2 q_2' - \cos q_1 \cos q_2 q_1') - y_2 \sin q_1 q_1'$$
$$z' = -z_2 \sin q_2 q_2' - x_2 \cos q_2 q_2'.$$

Ordnet man die rechten Seiten nach q_1' und q_2' und quadriert, so erhält man:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = q_1'^2 (z_2^2 \sin^2 q_2 \sin^2 q_1 + x_2^2 \sin^2 q_1$$

$\cos^2 q_2 + y_2^2 \cos^2 q_1 + 2\, x_2\, z_2 \sin^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2 + 2\, y_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 + 2\, x_2\, y_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos q_2) + q_2'^2\, (z_2^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + x_2^2 \sin^2 q_2 \cos^2 q_1 - 2\, x_2\, z_2 \cos^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2) - 2\, q_1'\, q_2'\, (z_2^2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 \cos q_2 - x_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin^2 q_2 + x_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos^2 q_2 - x_2^2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 \cos q_2 + y_2\, z_2 \cos^2 q_1 \cos q_2 - x_2\, y_2 \cos^2 q_1 \sin q_2) + q_1'^2\, (z_2^2 \sin^2 q_2 \cos^2 q_1 + x_2^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + y_2^2 \sin^2 q_1 + 2\, x_2\, z_2 \cos^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2 - 2\, y_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 - 2\, x_2\, y_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos q_2) + q_2'^2\, (z_2^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 + x_2^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 - 2\, x_2\, z_2 \sin^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2) + 2\, q_1'\, q_2'\, (z_2^2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 \cos q_2 - x_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin^2 q_2 + x_2\, z_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos^2 q_2 - x_2^2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 \cos q_2 - y_2\, z_2 \sin^2 q_1 \cos q_2 + x_2\, y_2 \sin^2 q_1 \sin q_2) + q_2'^2\, (z_2^2 \sin^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_2 + 2\, x_2\, z_2 \sin q_2 \cos q_2) = q_1'^2\, \{ z_2^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + x_2^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 + y_2^2 \cos^2 q_1 + z_2^2 \cos^2 q_1 \sin^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + y_2^2 \sin^2 q_1 + 2\, x_2\, z_2\, (\cos^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2 + \sin^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2) \} + q_2'^2\, \{ z_2^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_1 \sin^2 q_2 + z_2^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 + x_2^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + z_2^2 \sin^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_2 - 2\, x_2\, z_2\, (\cos^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2 - \sin q_2 \cos q_2 + \sin^2 q_1 \sin q_2 \cos q_2) \} + 2\, q_1'\, q_2'\, (x_2\, y_2 \sin q_2 - y_2\, z_2 \cos q_2) = q_1'^2\, (z_2^2 \sin^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_2 + y_2^2 + 2\, x_2\, z_2 \sin q_2 \cos q_2) + q_2'^2\, (z_2 \cos^2 q_2 + x_2^2 \sin^2 q_2 + z_2^2 \sin^2 q_2 + x_2^2 \cos^2 q_2) + 2\, q_1'\, q_2'\, (x_2\, y_2 \sin q_2 - y_2\, z_2 \cos q_2) = q_1'^2\, \{ (y_2^2 + z_2^2) \sin^2 q_2 + (x_2^2 + y_2^2) \cos^2 q_2 + 2\, x_2\, z_2 \sin q_2 \cos q_2 \} + q_2'^2\, (z_2^2 + x_2^2 + 2\, q_1'\, q_2'\, (x_2\, y_2 \sin q_2 - y_2\, z_2 \cos q_2);$

5) Dann wird $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\, C_1\, q_1'^2 + \frac{1}{2}\, q_1'^2 \{ \sin^2 q_2 \int (y_2^2 + z_2^2)\, dm_2 + \cos^2 q_2 \int (x_2^2 + y_2^2)\, dm_2$

$+ 2 \sin q_2 \cos q_2 \int x_2 z_2 \, dm_2 \} + \frac{1}{2} q_2'^2 \int (z_2^2 + x_2^2) dm_2 + q_1' q_2' \{\sin q_2 \int x_2 y_2 \, dm_2 - \cos q_2 \int y_2 z_2 \, dm_2\} = \frac{1}{2} q_1'^2 \{C_1 + A_2 \sin^2 q_2 + C_2 \cos^2 q_2 + 2 \sin q_2 \cos q_2 \int x_2 z_2 \, dm_2\} + \frac{1}{2} q_2'^2 B_2 + q_1' q_2' \{\sin q_2 \int x_2 y_2 \, dm_2 - \cos q_2 \int y_2 z_2 \, dm_2\}$.

Die Integrale $\int x_2 y_2 \, dm_2$, $\int x_2 z_2 \, dm_2$, $\int y_2 z_2 \, dm_2$ haben nun den Wert Null, wenn die Coordinatenaxen zugleich Hauptträgheitsaxen des Pendels sind. Ist nun die eigentliche Masse des Pendels mit der Stange des letzteren so verbunden, dass die x_2-Axe mit einer der durch den Schwerpunkt des Pendels hindurchgehenden Hauptträgheitsaxen zusammenfällt, so ist auch für den Coordinatenanfang die x_2-Axe eine der Hauptträgheitsaxen.[1]) Durch eine Drehung der Masse des Pendels um die x_2-Axe kann dann immer erreicht werden, dass auch die beiden anderen Hauptträgheitsaxen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Hat die Masse z. B. die Form eines Rotationskörpers, dessen Drehungaxe die x_2-Axe ist, so ist die obige Bedingung von selbst erfüllt; bei jeder anderen Form der Masse aber lässt sich die Lage der Hauptträgheitsaxen leicht durch Rechnung feststellen. Dann ist:

6) $T = \frac{1}{2} q_1'^2 \{C_1 + A_2 \sin^2 q_2 + C_2 \cos^2 q_2\} + \frac{1}{2} q_2'^2 B_2$;

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = q_1' \{C_1 + A_2 \sin^2 q_2 + C_2 \cos^2 q_2\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2'} = q_2' B_2.$$

Es ist die Kräftefunktion:

$V = -g \int x \, dm_1 - g \int x \, dm_2 = -g \int (x_1 \cos q_1 - y_1 \sin q_1) \, dm_1 - g \int (x_2 \cos q_1 \cos q_2 + z_2 \cos q_1 \sin q_2 - y_2 \sin q_1) \, dm_2 = -g \cos q_1 \int x_1 \, dm_1 + g \sin q_1$

[1]) Poisson, Traité de mécanique, tome II, Chapitre III.

$\int y_1\, dm_1 - g \cos q_1 \cos q_2 \int x_2\, dm_2 - g \cos q_1 \sin q_2 \int z_2\, dm_2 + g \sin q_1 \int y_2\, dm_2$.

Nun ist $\int x_2\, dm_2 = - M_2\, a$, die übrigen Integrale sind Null. Daher:

7) $V = g\, M_2\, a \cos q_1 \cos q_2$.

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial q_1} = - g\, M_2\, a \sin q_1 \cos q_2$$

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial q_2} = q_1'^2 (A_2 \sin q_2 \cos q_2 - C_2 \sin q_2) - g\, M_2\, a \sin q_2 \cos q_1;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) = q_1'' (C_1 + A_2 \sin^2 q_2 + C_2 \cos^2 q_2) + 2\, q_1'\, q_2' (A_2 - C_2) \sin q_2 \cos q_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_2'}\right) = B_2\, q_2''.$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann:

8) $\frac{d^2 q_1}{dt^2}\{C_1 + A_2 \sin^2 q_2 + C_2 \cos^2 q_2\} + 2 \frac{dq_1}{dt}\frac{dq_2}{dt}(A_2 - C_2) \sin q_2 \cos q_2 - g\, M_2\, a \sin q_1 \cos q_2;$

$$B_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} = \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 (A_2 - C_2) \sin q_2 \cos q_2 - g\, M_2\, a \sin q_2 \cos q_1.$$

Diese Gleichungen lassen sich vereinfachen und werden integrierbar, wenn zwischen den Trägheitsmomenten gewisse Beziehungen bestehen. Es sei $A_2 = C_2$.

Ist C das Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt des Pendels, parallel zur z_2-Axe gezogene Gerade, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn $A_2 = C + M_2\, a^2$ ist. Hieraus folgt für den Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenanfang der Wert: $a = \sqrt{\frac{A_2 - C}{M_2}}$. Damit dieser

Wert reell ist, muss die Form des Pendels eine derartige sein, dass $A_2 > C$ ist.

Integration für den Fall kleiner Schwingungen.

Die Schwingungen des Pendels seien so klein, dass in der Entwickelung der sinus und cosinus nur das erste Glied genommen zu werden braucht. Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$9) \quad \frac{d^2q_1}{dt^2} = -k_1^2 q_1 \qquad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -k_2^2 q_2, \text{ wo}$$

$$k_1^2 = g\,\frac{M_2\,a}{C_1 + C_2} \qquad k_2^2 = g\,\frac{M_2\,a}{B_2} \text{ ist.}$$

Die Integration ergiebt:

$$10) \quad q_1 = a_1 \cos k_1 t + b_1 \sin k_1 t$$
$$q_2 = q_2 \cos k_2 t + b_2 \sin k_2 t.$$

Behufs Bestimmung der Constanten werde festgesetzt, dass für $t = o$, $q_1 = o$ $\frac{dq_1}{dt} = v_1$, für $t = \tilde{\imath}$, $q_2 = o$ $\frac{dq_2}{dt} = v_2$ sei. Es wird also die Zeit von dem Augenblick an gerechnet, in welchem sich die x_2-Axe (Stange des Pendels) in der xz-Ebene befindet. $\tilde{\imath}$ ist die Zeit, nach welcher dieselbe Axe in die xy-Ebene gelangt. Die obigen Gleichungen lauten dann:

$$q_1 = \frac{v_1}{k_1} \sin k_1 t; \qquad q_2 = \frac{v_2}{k_2} \sin k_2\,(t - \tilde{\imath});$$

Bezeichnen T_1 und T_2 die Zeiten, welche verfliessen, während q_1 resp. q_2 von ihren Nullwerten bis zum nächsten Maximum resp. Minimum gelangen, so ist:

$$11) \quad T_1 = \frac{\pi}{2\,k_1},\ T_2 = \frac{\pi}{2\,k_2} \text{ und}$$

$$q_1 = \frac{2 v_1 T_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2 T_1} t$$

$$q_2 = \frac{2 v_2 T_2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2 T_2} (t - \tilde{\imath});$$

Bezeichnet ferner T eine Zeit, in welcher T_1 m mal, T_2 n mal enthalten ist, (wo m und n ganze Zahlen sind) so wird:

12) $$q_1 = \frac{2 v_1 T_1}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2T} t$$

$$q_2 = \frac{2 v_2 T_2}{\pi} \sin \frac{n\pi}{2T} (t - \tilde{\imath}),$$

Die Grössen q_1 und q_2 nehmen nach Verlauf einer Zeit $4\,T$ wieder dieselben Werte an, es wird daher die ganze Bahn des Pendels in dieser Zeit einmal durchlaufen. q_1 nimmt während dieser Zeit je m, q_2 je n Maximal- resp. Minimalwerte an.

Ist $m = n$ d. h. $k_1 = k_2$, so wird die Bahn des Pendels eine Ellipse, deren Gleichung ist:
$v_1^2 q_2^2 + v_2^2 q_1^2 - 2 v_1 v_2 \cos k_1 \tilde{\imath} \,.\, q_1 q_2 = \frac{v_1^2 v_2^2}{k_1^2} \sin^2 k_1 \tilde{\imath}$
und deren Halbaxen resp. die Längen:

$$a_1 = \frac{v_1 v_2 \sin k_1 \tilde{\imath} \sqrt{2}}{k_1 \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 - \sqrt{(v_1^2 - v_2^2) + 4 v_1 v_2 \cos^2 k_1 \tilde{\imath}}}}$$

$$b_1 = \frac{v_1 v_2 \sin k_1 \tilde{\imath} \sqrt{2}}{k_1 \sqrt{(v_1^2 + v_2^2) + \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4 v_1 v_2 \cos^2 k_1 \tilde{\imath}}}}$$

besitzen. Stehen die Grössen m und n nicht in einem genauen, ganzzahligen Verhältnisse, so verändert die Bahn des Pendels fortwährend ihre Lage und Gestalt.

Ist z. B. $m : n = 1 : 1 + \varepsilon$, wo ε eine sehr kleine positive Zahl ist, so ist die Bahn eine solche, wie die in

Fig. II in ihren auf einander folgenden Phasen dargestellte. Je nach dem kleineren oder grösseren Werte von ε geht die Gestalt 1) langsamer oder schneller in die Gestalt 2) u. ff. über. In den Figuren III und IV sind die auf einander folgenden Gestalten der Bahn für die Verhältnisse: $m : n = 3 : 4 + \varepsilon$ und $m : n = 4 : 5 + \varepsilon$ dargestellt. Welche der dort gezeichneten Phasen zuerst eintritt, hängt von dem Werte der Grösse $\tilde{\imath}$ ab.

Diese Curven stimmen überein mit den Lissajous'schen Figuren, welche die Schwingungscurven darstellen, die aus den Schwingungen zweier, in zu einander senkrechten Ebenen schwingenden Stimmgabeln resultieren[1]).

Der Wert des Verhältnisses der Grössen m und n lässt sich aus der gegebenen Masse und Gestalt des Pendels bestimmen, da $m : n = \sqrt{B_2} : \sqrt{C_1 + C_2}$ ist.

Integration für den Fall von Schwingungen endlicher Grösse.

Eine weitere Vereinfachung der Differentialgleichungen für die Bewegung des Pendels tritt ein, wenn man der Bedingung $A_2 = C_2$ noch hinzufügt, dass zugleich $B_2 = C_1 + A_2$ sein soll. Wie diesen Bedingungen durch die Verteilung und Form der Masse des Pendels entsprochen werden kann, soll am Schluss an einem Beispiel gezeigt werden. Die Bewegungsgleichungen sind dann:

$$13) \qquad \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\frac{g M_2 a}{B_2} \sin q_1 \cos q_2$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\frac{g M_2 a}{B_2} \sin q_2 \cos q_1$$

[1]) Lissajous, Annal. de Chémie 3. serie, L. I. 147. Helmholtz, die Lehre von den Tonempfindungen. 4. Aufl. S. 205 u. 206.

Bezeichnet man den konstanten Faktor auf der rechten Seite mit k^2 und führt neue Variabele ein indem man setzt:

$$q_1 + q_2 = \psi_1 \qquad q_1 - q_2 = \psi_2$$

addiert und subtrahiert dann die Gleichungen, so erhält man:

$$14) \quad \frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -k^2 \sin \psi_1$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -k^2 \sin \psi_2.$$

Jede dieser Gleichungen ist der Form nach dieselbe, wie die Differentialgleichung für die Bewegung des in einer Ebene schwingenden Pendels. Die Integration ergiebt:

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 = 2k^2 \cos \psi_1 + C_1$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \sqrt{2k^2 \cos \psi_1 + C_1} = k\sqrt{2}\sqrt{\cos \psi_1 - \cos \alpha_1}$$

wenn α_1 der Maximalwert von ψ_1 und daher $C_1 = -2k^2 \cos \alpha_1$ ist. Es wird:

$$dt = \frac{d\psi_1}{k\sqrt{2}\sqrt{\cos\psi_1 - \cos\alpha_1}}; \quad t = \frac{1}{k\sqrt{2}}\int \frac{d\psi_1}{\sqrt{\cos\psi_1 - \cos\alpha_1}} + C.$$

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, in welchem $\psi_1 = o$ ist, so ist $C = o$ zu setzen. Zur Reduction auf die Normalform setzt man: $\sin \psi_1 = \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \varphi_1$ und findet:

$$15) \quad t = \frac{1}{k}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \varphi_1}}.$$

Bei der Integration der zweiten Gleichung verfährt man gerade so und erhält:

$$t = \frac{1}{k\sqrt{2}}\int \frac{d\psi_2}{\sqrt{\cos \psi_2 - \cos \alpha_2}} + C'.$$

Wird nach einer Zeit t vom Anfang der Bewegung an gerechnet der Winkel $\psi_2 = o$, so ist:

$$t - \tilde{\iota} = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{d\psi_2}{\cos \psi_2 - \cos \alpha_2}},$$

woraus durch Substitution erhalten wird:

$$16) \qquad t - \tilde{\iota} = \frac{1}{k} \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \sin^2 \varphi_2}};$$

Zur Abkürzung bezeichnet man:

$$17) \qquad \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = m_1^2 \quad \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} = m_2^2. \text{ Dann ist:}$$
$$\varphi_1 = am\ (kt,\ m_1),\ \varphi_2 = am\ (k(t - \tilde{\iota}),\ m_2).$$

Bezeichnet man mit T_1 resp. T_2 die Zeiten, welche verfliessen, während φ_1 resp. φ_2 von Null bis $\frac{\pi}{2}$ anwachsen und mit K_1 resp. K_2 die vollständigen elliptischen Integrale der ersten Gattung, so wird:

$$18) \qquad T_1 = \frac{K_1}{k}, \qquad T_2 = \frac{K_2}{k} \text{ und daher}$$

$$\varphi_1 = am \left(\frac{K_1}{T_1} t,\ m_1 \right) \qquad \varphi_2 = am \left(\frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\iota}),\ m_2 \right),$$

zugleich besteht die Beziehung: $\frac{K_1}{T_1} = \frac{K_2}{T_2}$; ferner ist:

$$\sin \frac{\psi_1}{2} = m_1 \sin am \frac{K_1}{T_1} t \pmod{m_1}$$

$$\sin \frac{\psi_2}{2} = m_2 \sin am \frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\iota}) \pmod{m_2}$$

$$\cos \frac{\psi_1}{2} = \Delta am \frac{K_1}{T_1} t; \pmod{m_1} \qquad \cos \frac{\psi_2}{2} = \Delta am \frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\iota}) \pmod{m_2}$$

woraus man erhält:

$$\sin q_1 = m_1 \sin am \frac{K_1}{T_1} t \, \Delta am \frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\iota}) \pmod{m_2}$$
$$+ m_2 \sin am \frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\iota}) \, \Delta am \frac{K_1}{T_1} t. \pmod{m_1}$$

$$\cos q_1 = \Delta am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \, \Delta am \frac{K_2}{T_{2(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) - m_1 m_2 \sin am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \sin am \frac{K_2}{T_{2(m_2)}} (t - \tilde{\imath})$$

19) $$\sin q_2 = m_1 \sin am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \, \Delta am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) - m_2 \sin am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) \, \Delta am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t.$$

$$\cos q_2 = \Delta am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \, \Delta am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) + m_1 m_2 \sin am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \sin am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath})$$

Der Abstand eines Punktes der x_2-Axe sei $x_2 = -r$, dann ist mit Anwendung der Formeln 3)

$$x = -r \cos q_1 \cos q_2, \qquad y = -r \sin q_1 \cos q_2,$$
$$z = r \sin q_2.$$

Setzt man in diese Gleichungen die obigen Werte ein, so ergiebt sich nach Anwendung einiger einfacher Relationen:

20) $$x = -r \left\{ 1 - m_1^2 \sin^2 am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t - m_2^2 \sin am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) \right\}$$

$$y = -r \left\{ m_1 \sin am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \, \Delta am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t + m_2 \sin am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) \, \Delta am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) \right\}$$

$$z = r \left\{ m_1 \sin am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t \, \Delta am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) - m_2 \sin am \frac{K_2}{T_{2\,(m_2)}} (t - \tilde{\imath}) \, \Delta am \frac{K_1}{T_{1\,(m_1)}} t. \right\}$$

Über die Werte von α_1 und α_2 lässt sich noch Folgendes hinzufügen:

Ist für $t = o$, $\frac{dq_1}{dt} = u_1$ $\frac{dq_2}{dt} = u_2$ $\psi_2 = q_2{}^0$,

so folgt: $(u_1 + u_2)^2 = 2k^2 + C_1$, $(u_1 + u_2)^2 = 2k^2 \cos q_2{}^0 + C_2$

$$C_1 = (u_1 + u_2)^2 - 2k^2 = -2k^2 \cos \alpha_1$$

$C_2 = (u_1 - u_2)^2 - 2k^2 \cos q_2{}^0 = -2k^2 \cos \alpha_2$, woraus:

21) $$\cos \alpha_1 = 1 - \frac{(u_1 + u_2)^2}{2k^2}; \qquad \cos \alpha_2 = \cos q_2{}^0 - \frac{(u_1 + u_2)^2}{2k^2};$$

Hierdurch sind α_1 und α_2, also auch die Moduln m_1 und m_2 durch die Anfangswerte der Winkelgeschwindigkeiten und des Winkels ψ_2 ausgedrückt.

Ein besonderer Fall der Bewegung tritt ein, wenn $u_1 = - u_2$ ist. Es ist dann $m_1 = o$, $m_2 = \cos q_2{}^0 - \frac{2u_1{}^2}{k^2}$; die obigen Gleichungen für die Bewegung des Pendels vereinfachen sich dann zu:

$$22) \quad x = - r \Delta^2 am \frac{K_2}{T_2} \underset{(m_2)}{(t - \tilde{\imath})}$$

$$y = - rm_2 \sin am \frac{K_2}{T_2} \underset{(m_2)}{(t - \tilde{\imath})} \Delta am \frac{K_2}{T_2} \underset{(m_2)}{(t - \tilde{\imath})}$$

$$z = - rm_2 \sin am \frac{K_2}{T_2} \underset{(m_2)}{(t - \tilde{\imath})}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen geht hervor, dass x nicht positiv werden kann, dass das Pendel also in der unteren Halbkugel bleibt. Man bildet $\frac{dy}{dt}$.

$$23) \quad \frac{dy}{dt} = - rm_2 \frac{K_2}{T_2} \cos am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}) \left\{ \Delta^2 am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}) - \sin^2 am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}) \right\}$$

Dieser Wert wird Null für:

$$\frac{K_2}{T_2}(t - \tilde{\imath}) = K_2,\ 3\,K_2,\ 5\,K_2 \ldots\ldots (2\,n + 1)\,K_2$$

und für $\sin am \frac{K_2}{T_2}(t - \tilde{\imath}) = \pm \frac{1}{m_2\sqrt{2}}$.

Letzterem Werte entspricht ein reeller Wert der Amplitude nur wenn $m_2 > \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Man hat daher zwei Fälle zu unterscheiden. Eliminiert man aus den Gleichungen für y und z die elliptischen Funktionen, so ergiebt sich: $y^2 = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$. Die dieser Gleichung entsprechende

Curve ist in Fig. V dargestellt. Ist nun $m_2 < \sqrt{\frac{1}{2}}$, so erreicht für:

$\frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}) = K_2,\ 3K_2,\ 5K_2 \ldots\ldots\ (2n+1)\,K_2$

y die Minimal- resp. Maximalwerte $\mp\, rm_2m_2'$

z „ „ „ „ $\mp\, rm_2$.

Die Projektion der Pendelbahn auf die yz-Ebene liegt daher auf dem zwischen den Punkten A und B, resp. C und D enthaltenen Curvenstück. Die Grenzpunkte A, B oder C, D werden erreicht für $m_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Welcher der beiden sich im Punkte $y = o$, $z = o$ schneidenden Curventeile in einem bestimmten Falle durchlaufen wird, hängt von den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten u_1 und u_2 ab. Ist $m_2 > \sqrt{\frac{1}{2}}$, so gelangt das Pendel auch in den Teil der Bahn, dessen Projektion in den über A und B, resp. C und D hinaus bis E und F reichenden Curventeilen dargestellt ist. Die Grenzpunkte E und F selbst werden erreicht für $m_2 = 1$.

Bewegung für den Fall, dass $m_2 = m_1$ ist.

Dieser Fall tritt ein, wenn $u_1 u_2 = k^2 \sin\frac{^2q^{02}}{2}$ ist. Da alsdann $K_2 = K_1$ und $T_2 = T_1$ ist, so wird:

24) $x = -r\left\{1 - m_1{}^2(\sin^2 am\frac{K_1}{T_1}t + \sin^2 am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\right\}$ (mod. m_1)

$y = -rm_1\left\{\sin am\frac{K_1}{T_1}t\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}t + \sin am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\right\}$

$z = rm_1\left\{\sin am\frac{K_1}{T_1}t\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath}) - \sin am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}t\right\}$.

Da die Coordinaten nach Verlauf einer Zeit $t = 4T_1$ wieder dieselben Werte annehmen, so beschreibt jeder Punkt der x_2-Axe eine geschlossene Curve.

Die Projektion derselben auf die yz-Ebene besitzt einen Mittelpunkt ($y = o$, $z = o$), denn die Coordinaten y und z nehmen nach einer Zeit $t = 2T_1$ dieselben Zahlenwerte mit entgegengesetzten Vorzeichen an. Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch den Schwerpunkt des Pendels gehende bewegliche x_2-Axe mit der festen x-Axe bildet mit χ, so ist

$$25)\quad \cos\chi = -\frac{x}{r} = 1 - m_1^2\left(\sin^2 am\frac{K_1}{T_1}t + \sin^2 am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\right).$$

$$\text{Es ist } \frac{d\cos\chi}{dt} = -2m_1\frac{K_1}{T_1}\left\{\sin am\frac{K_1}{T_1}t\cos am\frac{K_1}{T_1}t\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}t\right.$$
$$\left. + \sin am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\cos am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\,\Delta am\frac{K_1}{T_1}(t-\tilde{\imath})\right\}.$$

Berücksichtigt man, dass $\sin amv = -\sin am(-v)$
$\cos amv = \cos am(-v)$, $\Delta amv = \Delta am(-v)$,
$\sin am(K+v) = \sin am(K-v)$
$\cos am(K+v) = -\cos am(K-v)$
$\Delta am(K+v) = \Delta am(K-v)$

ist, so findet man, dass $\frac{d\cos\chi}{dt} = o$ wird für:

$$t = \frac{\tilde{\imath}}{2},\ T_1 + \frac{\tilde{\imath}}{2},\ 2T_1 + \frac{\tilde{\imath}}{2} \ldots\ldots$$

Zur Entscheidung, wann ein Maximum resp. Minimum eintritt, würde $\frac{d^2\cos\chi}{dt^2}$ zu bilden sein, doch gelangt man einfacher zur Entscheidung durch Vergleichung der den Werten $t = \frac{\tilde{\imath}}{2}$ und $t = T_1 + \frac{\tilde{\imath}}{2}$ entsprechenden Werte

von cos χ, da der eine dieser Werte notwendig ein Maximum, der andere ein Minimum sein muss.

Es ist: $\cos\chi = 1 - 2m_1{}^2 \sin{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}$. $\left(t=\frac{i}{2}\right)$

$$\cos\chi = 1 - \frac{2m_1{}^2 \cos{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}}{\Delta^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}}. \qquad \left(t = T_1 + \frac{i}{2}\right)$$

Es wird daher für $t = \frac{i}{2}$ ein Maximum resp. Minimum des Winkels χ stattfinden je nachdem:

$$26)\quad \sin{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2} \gtrless \frac{\cos{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}}{\Delta^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}}.$$

Drückt man alle Funktionen durch sin am aus, so erhält man als Bedingung für ein Maximum von χ:

$$m_1{}^2 < \frac{2\sin{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2} - 1}{\sin 4\,am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}};$$ für ein Minimum:

$$m_1{}^2 > \frac{2\sin{}^2 am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2} - 1}{\sin 4\,am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}}.$$

Liegt der Wert von $\sin am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}$ zwischen Null und $\sqrt{\frac{1}{2}}$, so tritt für $t = \frac{i}{2}$ stets ein Minimum ein, also für $t = T_1 + \frac{i}{2}$ ein Maximum, liegt $\sin am\,\frac{K_1}{T_1}\,\frac{i}{2}$ zwischen $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ und ± 1, so kann je nach dem Werte von m_1 ein Maximum oder Minimum stattfinden.

Nun muss $\tilde{\imath}$ stets kleiner als T_1 sein, sin $am \frac{K_1}{T_1} \frac{\tilde{\imath}}{2}$ wird daher immer kleiner als sin $am \frac{K_1}{2}$ sein müssen. Wegen der Konstruktion des Pendels darf die x_2-Axe während der Bewegung die horizontale Lage nicht annehmen, x also nicht Null werden. Es muss daher:

$$27)\ m_1^2 < \frac{1}{\sin^2 am \frac{K_1}{T_1} t + \sin^2 am \frac{K_1}{T_1} (t - \tilde{\imath})} \text{ sein.}$$

Der Nenner nimmt seinen grössten Wert für $t = \frac{\tilde{\imath}}{2}$ an; soll aber $\tilde{\imath}$ alle möglichen Werte annehmen können, so muss $m_1^2 < \frac{1}{2(1+m_1')}$ sein, da sin $am \frac{K_1}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{1+m_1'}}$ ist und letzterer Wert nahezu erreicht wird, wenn $\tilde{\imath}$ angenähert gleich T_1 ist. Es ergiebt sich hieraus durch Umformung die Bedingung $m_1'^3 + m_1'^2 - m_1' > \frac{1}{2}$. Die kubische Gleichung $m_1'^3 + m_1'^2 - m_1' = \frac{1}{2}$ hat zwei negative und eine positive Wurzel: $m_1' = 0{,}8546 \ldots\ldots$

Hieraus ergiebt sich zur Erfüllung der genannten Bedingung für m_1 die obere Grenze 0,5193 . . . . . Diesen Wert darf m_1 nicht überschreiten, wenn der Wert von $\tilde{\imath}$ keiner Beschränkung unterliegt. Für jeden bestimmten Wert von $\tilde{\imath}$ folgt ein für die betreffende Bewegung stattfindender oberer Grenzwert von m_1. Für $t = \frac{\tilde{\imath}}{2}$ wird $y = o$ und z erreicht seinen Maximal- resp. Minimalwert, für $t = T_1 + \frac{\tilde{\imath}}{2}$ wird $z = o$ und y erreicht seinen Minimal- resp. Maximalwert. Die y- und x-Axe sind daher Symmetricaxen für die Projektion der Bahn auf die yz-Ebene.

Die Bewegung des Pendels für den allgemeinen Fall, dass m_1 und m_2 von einander verschieden sind, wird durch die Gleichungen 20) bestimmt.

Es soll im Folgenden angenommen werden, dass m_2 der grössere Modul ist, da für den umgekehrten Fall die Betrachtung sich nicht ändert.

Es ist dann $K_2 > K_1$ und auch $T_2 > T_1$, daher sind die rechten Seiten der genannten Gleichungen weder um $4T_1$ noch um $4T_2$ periodisch. Giebt es zwei relative Primzahlen n und ν von der Beschaffenheit, dass $T = nT_1 = \nu T_2$ ist, so erhält man aus den oben genannten Gleichungen:

$$28)\quad x = -r\left(1 - m_1^2 \sin^2 am \frac{nK_1}{T} t - m_2^2 \sin^2 am \frac{\nu K_2}{T}(t-\tilde{\iota})\right)$$

$$y = -r\left(m_1 \sin am \frac{nK_1}{T} t \Delta am \frac{nK_1}{T} t + m_2 \sin am \frac{\nu K_2}{T}(t-\tilde{\iota}) \Delta am \frac{\nu K_2}{T}(t-\tilde{\iota})\right)$$

$$z = r\left(m_1 \sin am \frac{nK_1}{T} t \Delta am \frac{\nu K_2}{T}(t-\tilde{\iota}) \quad m_2 \sin am \frac{\nu K_2}{T}(t-\tilde{\iota}) \Delta am \frac{nK_1}{T} t.\right)$$

Die rechte Seite der ersten dieser Gleichungen ist um $2T$ periodisch, die der zweiten und dritten um $4T$. Für alle Werte der Zeit, welche um $4T$ auseinanderliegen, erreicht dann ein Punkt des Pendels wieder denselben Ort, die Bahn ist also eine geschlossene Curve. Sind n und ν ungerade Zahlen, so haben je zwei Werte von y resp. z, die einer Zeitdifferenz $2T$ entsprechen, entgegengesetzte Vorzeichen, so dass in diesem Falle die Projektion der Bahn einen Mittelpunkt besitzt. Setzt man $4(T_2 - T_1) = p$, so erreichen die Coordinaten nach einer Zeit $t + 4T_1$ die Werte:

$$29)\quad x = -r\left(1 - m_1^2 \sin^2 am \frac{K_1}{T_1} t - m_2^2 \sin^2 am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\iota}-p)\right)$$

$$y = -r\left(m_1 \sin am \frac{K_1}{T_1} t \Delta am \frac{K_1}{T_1} t + m_2 \sin am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}-p) \Delta am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}-p)\right)$$

$$z = r\left(m_1 \sin am \frac{K_1}{T_1} t \Delta am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}-p) - m_2 \sin am \frac{K_2}{T_2}(t-\tilde{\imath}-p) \Delta am \frac{K_1}{T_1} t.\right)$$

Da $T_1 = \frac{K_1}{k}$, $T_2 = \frac{K_2}{k}$, so ist für jeden Wert der Moduln m_1 und m_2 die Grösse p bestimmt. Eine weitergehende allgemeine Diskussion der Gleichungen ist umständlich und liefert kein übersichtliches Resultat. Es ist einfacher, für jeden bestimmten Fall die Bahn des Pendels durch numerische Berechnung der Coordinaten zu bestimmen.

Die Grössen T_1 und T_2 sind meist nur wenig von einander unterschieden. In der nachstehenden kleinen Tafel sind für verschiedene Werte des Moduls die zugehörigen Werte der vollständigen Integrale K enthalten.

m	K
0	1,571
0,1	1,575
0,2	1,588
0,3	1,608
0,4	1,640
0,5	1,686
0,6	1,751
0,7	1,846
0,8	1,995
0,9	2,281
0,95	2,590
0,99	3,354

Man ersieht hieraus, dass besonders für kleine Werte der Moduln die Werte von K nur wenig von einander

abweichen. Dasselbe gilt daher auch von den Grössen T_1 und T_2.

Die Grösse p in den Gleichungen 29) hat dann nur einen kleinen Wert, so dass jede zwei aufeinander folgenden Werte der Coordinaten, die einer Zeitdifferenz $4T_1$ entsprechen, nur wenig von einander abweichen. Die in zwei aufeinander folgenden Zeiten $4T_1$ beschriebenen Curven sind dann einander nahe benachbart und es findet nur eine langsame Änderung der Pendelbahn statt.

Ist das Verhältnis $\frac{T_2}{T_1}$ nicht durch ganze Zahlen n und ν ausdrückbar, welcher Fall, da K_2 und K_1 irrationale Grössen sind, meist eintreten wird, so ist die Pendelbahn keine geschlossene, doch lässt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen, indem man das Verhältnis $\frac{T_2}{T_1} = \frac{n}{\nu}$ durch einen Näherungswert ausdrückt.

Im Folgenden soll die Berechnung der Bahn für ein Pendel von bestimmter Form und Masse durchgeführt werden, für welches die obige Bedingung $A_2 = C_2$, $B_2 = A_2 + C_1$ erfüllt ist.

Ist das Trägheitsmoment C_1 des Cardanischen Ringes so klein, dass dasselbe A_2 gegenüber vernachlässigt werden kann, so kann statt der obigen Bedingung auch gesetzt werden: $A_2 = B_2 = C_2$. Diese ist erfüllt, wenn die Hauptmasse des Pendels recht gross ist und die Form eines Rotationskörpers besitzt, dessen Axe die x_2-Axe ist. Es muss dann $a = \sqrt{\frac{A_2 - C}{M_2}}$ sein.

Die an der Pendelstange befestigte Masse sei ein Kreisring von quadratischem Querschnitt, dessen Polaxe mit der x_2-Axe zusammenfällt. Derselbe sei durch ein Kreuz aus Stahldraht mit der Pendelstange verbunden, die Drähte seien parallel der $y_2 =$ resp. z_2-Axe gerichtet und gehen durch den Schwerpunkt des Pendels. Die zur z_2-Axe parallelen Drähte seien mit einem Schraubengewinde versehen, vermittels dessen sich zwei Kugeln auf denselben hin- und herbewegen lassen. Alle ausser den schon genannten stählernen Teilen seien aus Messing gefertigt.

Sind R und r die Radien der ringförmigen Pendelmasse, s ihre Dichtigkeit, $2m$ die Masse der beiden Kugeln, deren Radius ϱ und deren Mittelpunktsabstand vom Schwerpunkt der Pendelmasse λ ist, so ergeben sich für die Trägheitsmomente der ganzen Pendelmasse in Bezug auf die durch den Schwerpunkt führenden Hauptaxen die Werte:

$$A = \frac{M'}{2}(R^2 + r^2) + 2m\left(\frac{2\varrho^2}{5} + \lambda^2\right)$$

$$B = M'\left(\frac{R^2 + r^2}{3} - \frac{Rr}{6}\right) + 2m\left(\frac{2\varrho^2}{5} + \lambda^2\right)$$

$$C = M'\left(\frac{R^2 + r^2}{3} - \frac{Rr}{6}\right) + \frac{4m\varrho^2}{5}$$

(M' ist die Masse der ringförm. Pendelmasse.)

Ferner wird:

$$a = \sqrt{\frac{A - C}{M' + 2m}} = \sqrt{\frac{\frac{M'(R^2 + r^2 + Rr)}{6} + 2m\lambda^2}{M' + 2m}}.$$

$$A_2 = C_2 = \frac{M'}{2}\left\{R^2 + r^2\right\} + 2m\left(\frac{2\varrho^2}{5} + \lambda^2\right).$$

$$B_2 = B + (M' + 2m)\,a^2 = A_2 + 2m\lambda^2.$$

$$M' = (R + r)\,(R - r)\,{}^2\pi\, s, \quad m = \frac{4\varrho^3 \pi s}{3}.$$

Für den Cardanischen Ring, dessen Querschnitt rechteckig ist erhält man, wenn l_1 die Höhe bedeutet und die übrigen Bezeichnungen den obigen entsprechen:

$$C_1 = M_1 \left(\frac{l_1^2}{12} + \frac{R_1^2 + r_1^2}{4}\right)$$

$M_1 = l_1 \pi s\ (R_1^2 - r_1^2)$, woraus sich ergiebt:

$$\lambda^2 = \frac{M_1 \left(\frac{l_1^2}{12} + \frac{R_1^2 + r_1^2}{4}\right)}{2m}.$$

Der Einfluss der Massen der stählernen Drehungsaxen ist hierbei als sehr gering vernachlässigt worden.

Es sei $R = 10$ cm, $r = 9{,}5$ cm $\varrho = 0{,}75$ cm
$R_1 = 4$ cm, $r_1 = 3{,}5$ cm $l_1 = 0{,}4$ cm.

Dann ist: $M' = 15{,}315 \,.\, s$ $2m = 3{,}534 \,.\, s$
$M_1 = 4{,}712 \,.\, s$ $2m\lambda^2 = 33{,}341 \,.\, s$
$A_2 = A = 1491{,}071 \,.\, s$ $C = 729{,}545 \,.\, s$
$a = 6{,}356$ cm $B_2 = 1524{,}412 \,.\, s$
$k = 8{,}781$ $\lambda = 3{,}072$ cm.

Die Werte der Moduln seien:

$$m_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}70711 \qquad m_1 = 0{,}2.$$

Es ist dann $K_2 = 1{,}854$ $K_1 = 1{,}588$
$T_2 = 0{,}181$ $T_1 = 0{,}211.$

Zum Zweck der numerischen Berechnung drückt man in den Gleichungen 20) die rechten Seiten durch ϑ-Funktionen aus:

$$y = -\,r\,\left\{\sqrt{m_1 m_1'}\,\frac{\vartheta_1 \xi\, \vartheta_3 \xi}{\vartheta\xi\,\vartheta\xi} + \sqrt{m_2 m_2'}\,\frac{\vartheta_1 \eta\, \vartheta_3 \eta}{\vartheta\eta\,\vartheta\eta}\right\}$$

$$z = r \left(\sqrt{m_1 m_2} \frac{\vartheta_1 \xi \vartheta_3 \eta}{\vartheta \xi \vartheta \eta} - \sqrt{m_2 m_1} \frac{\vartheta_1 \eta \vartheta_3 \xi}{\vartheta \eta \vartheta \xi} \right)$$

worin $\xi = \frac{\pi u_1}{2K_1}$, $\eta = \frac{\pi u_2}{2K_2}$ und

$u_1 = \frac{K_1}{T_1} t_{(\mathrm{mod}\, m_1)}$ $u_2 \frac{K_2}{T_2} (t - \tilde{\imath})_{(\mathrm{mod}\, m_2)}$ ist.

Zur Berechnung der ϑ-Funktionen bedient man sich der bekannten sehr convergenten Reihen. Im Folgenden sind die Werte von 90 Coordinaten für Zeitdifferenzen von $t = \frac{T_1}{3}$ von $t = o$ beginnend angegeben. Die aus denselben construierte Curve für $r = 100$ ist in Fig. VI dargestellt.

y	z	y	z	y	z
— 0,408	+ 0,459	+ 0,199	— 0,204	+ 0,495	— 0,658
— 0,04	0,241	0,322	0,584	0,600	0,632
+ 0,384	— 0,047	0,324	0,781	0,666	0,513
0,634	0,329	0,304	0,834	0,617	0,297
0,667	0,527	0,323	0,771	0,341	0,001
0,599	0,631	0,315	0,558	— 0,081	+ 0,283
0,493	0,644	+ 0,157	0,159	0,426	0,489
0,309	0,548	— 0,096	+ 0,286	0,595	0,578
— 0,027	— 0,314	0,260	0,620	0,671	0,574
0,405	+ 0,016	0,300	0,789	0,691	0,491
0,607	0,350	0,329	0,827	0,594	0,325
0,596	0,587	0,394	0,735	0,274	0,078
0,500	0,706	0,417	0,474	+ 0,178	— 0,181
0,393	0,719	— 0,26	0,063	0,525	0,396
— 0,240	0,611	+ 0,021	— 0,363	0,665	0,515
+ 0,049	0,343	0,233	0,658	0,696	0,552
0,377	— 0,039	0,324	0,780	0,666	0,515
0,535	0,415	0,400	0,774	0,525	0,396
0,496	0,664	0,494	0,651	0,178	0,181
0,399	0,774	0,519	0,385	— 0,274	+ 0,078
0,323	0,769	0,334	+ 0,007	0,594	0,325
+ 0,217	0,634	+ 0,007	+ 0,384	0,690	0,491
— 0,021	— 0,321	— 0,257	0,635	0,671	0,574
0,303	+ 0,108	0,395	0,731	0,595	0,578
0,433	0,502	0,500	0,707	0,426	0,489
0,396	0,735	0,595	0,573	0,081	0,282
0,329	0,818	0,591	0,319	+ 0,341	— 0,001
0,298	0,787	0,362	0,030	0,617	0,297
0,243	0,615	+ 0,014	0,356	0,665	0,513
— 0,053	0,254	0,327	0,576	0,600	0,632